数理解析研究所講究録
166巻 1972年 101-108

Derivation and Automorphisms of operator algebras II

奈良高専　北川誠之助

§1 序

本講演は

Kadison, Lance and Ringrose

Derivation and Automorphisms of operator algebras II

Journal of functional analysis 1967, I

を紹介する

Kadison Ringroseによる同名の論文 I においては automorphism group を norm によるtopologyを入れ, connected component, etc が論じられているが. 本論文においては, C^*-algebra における derivation が inner ~~…~~になる条件を論じている.

§2 記号及び定義

$\mathfrak{A}$: $\mathfrak{H}$上に働く C^*-algebra.

$\bar{\mathfrak{A}}$: $\mathfrak{A}$の weak closure

δ: $\mathfrak{A}$の derivation.

$\bar{\delta}$: δの $\bar{\mathfrak{A}}$への拡張~~…~~とする. $\|\delta\| = \|\bar{\delta}\|$は知られている [ ]

ここでδが derivation であるとは.

$\delta : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$: linear mapping.

$\mathfrak{A} \ni {}^\forall A, B$. $\delta(AB) = A\delta(B) + \delta(A)B$

特に δ が $*$-derivation とは $\delta(A^*) = \delta(A)^*$

δ : inner-derivation とは. ${}^\exists A \in \mathfrak{A}$ s.t $\delta(B) = ad(A)(B) = AB - BA$ for ${}^\forall B$

§3 derivation.

[1] [2] により $\bar{\delta}$ は $\bar{\mathfrak{A}}$ において inner-derivation となることが示されているが, 次の定理はその精密化である.

定理1 δ : $\mathfrak{A}$ の $*$-derivation.

$\Rightarrow$ 次のような性質をみたす self-adjoint operator H が $\bar{\mathfrak{A}}$ に一意的に存在する

i) Q : 任意の central projection.

$$\frac{1}{2}\|\bar{\delta}|\bar{\mathfrak{A}}_Q\| = \|H|Q\mathfrak{H}\|$$

$$\|H|Q\mathfrak{H}\| = \sup_{\|Qx\| = \|x\| = 1}(Hx, x) = -\inf_{\|Qx\| = \|x\| = 1}(Hx, x)$$

ii) $\bar{\delta} = i\,ad\,H$

《proof》

$\alpha_t = e^{t\bar{\delta}}$ は $\bar{\delta}$ が inner $*$-derivation だから, α_t は $\bar{\mathfrak{A}}$ の inner automorphism となる $\{\alpha_t : -\infty < t < \infty\}$ は norm-continuous inner automorphism だから. 十分小さな t に対して.

$\|\alpha_t - I\| < 2$ を満足する.

[1] Lemma 5 より, α_t を implement する, unitary operator U_t を次の性質を満すように取れる

$$Sp(U_t) \subset \{ z : \operatorname{Re} z \geq \tfrac{1}{2}\sqrt{4 - \|\alpha_t - I\|^2} \}$$

従って　$U_t = e^{iB_t}$ とする　B_t = self-adjoint in $\mathfrak{R}$

$$\|B_t\| \leq \operatorname{Tan}^{-1} \frac{\|\alpha_t - I\|^2}{\sqrt{4 - \|\alpha_t - I\|^2}}$$ を満足する

$\alpha_t = e^{i\,\mathrm{ad} B_t} = e^{t\bar{\delta}}$ より　$i\,\mathrm{ad}\frac{B_t}{t} = \bar{\delta}$

$$\left\|\frac{B_t}{t}\right\| \leq \frac{1}{t}\operatorname{Tan}^{-1}\frac{\|\alpha_t - I\|^2}{\sqrt{4-\|\alpha_t - I\|^2}} \leq \frac{1}{t}\frac{\|\alpha_t - I\|}{\sqrt{4-\|\alpha_t - I\|^2}} \leq \frac{1}{t}\frac{(e^{t\|\bar{\delta}\|} - I)}{\sqrt{4 - \|\alpha_t - I\|^2}}$$

$\therefore t \to 0$　　$\|\frac{1}{t}B_t\| \longrightarrow \frac{1}{2}\|\bar{\delta}\|$

$\frac{1}{2}\|\bar{\delta}\| < {}^\forall k$　　${}^\exists B_k$ = self-adjoint s.t. $i\,\mathrm{ad} B_k = \bar{\delta}$, $\|B_k\| \leq k$.

$\therefore \mathbb{B}_k = \{ B : i\,\mathrm{ad} B = \bar{\delta},\ \|B\| \leq k \} \neq \phi$: weakly-~~closed~~ compact.

$\therefore \bigcap_{\frac{1}{2}\|\bar{\delta}\| < k} \mathbb{B}_k \neq \phi$　よって ${}^\exists B$: self-adjoint s.t. $i\,\mathrm{ad} B = \bar{\delta}$　$\|B\| \leq \frac{1}{2}\|\bar{\delta}\|$

又 $\|B\| \geq \frac{1}{2}\|\bar{\delta}\|$ は容易にわかる　以上により

${}^\exists B$: self-adjoint operator, s.t. $i\,\mathrm{ad} B = \bar{\delta}$　$\|B\| = \frac{1}{2}\|\bar{\delta}\|$

がわかる。

次に $\{P_i\}$: finite central projections s.t. $\sum P_i = I$　$P_i \perp P_j$ $i \neq j$

$\{P_i\} \prec \{Q_j\} \Longleftrightarrow$ 任意の Q_j はある P_i の sub projection

$\{ H(\{Q_j\}) : \|HQ_j\| = \frac{1}{2}\|\bar{\delta}|\mathfrak{R}_{Q_j}\|,\ i\,\mathrm{ad} HQ_j = \bar{\delta}|\mathfrak{R}_{Q_j},\ H(\{Q_j\}) : \text{self-adjoint} \}$

前の議論より空ではなく, weakly compact だから.

$\therefore \bigcap_{\{Q_j\}} \{H(\{Q_j\})\} \neq \phi$.

よって $\bigcap_{\{Q_j\}} \{H(\{Q_j\})\} \ni H$ が定理の性質を満たすことは容易にわかる　　q.e.d.

次に $*$-derivation δ が ~~中~~ inner になるための十分条件を与える。
以下証明は容易なので省略する.

反例において $\mathfrak{H}$ = separable Hilbert space

$\mathcal{C}(\mathfrak{H})$ = $\mathfrak{H}$ 上の compact operator の全体

i) $\exists t \neq 0$ s.t. $\|t\delta\| < \pi$ 且つ $\alpha_t = e^{t\delta}$ は inner で α_t を implement する unitary operator U を $\mathrm{sp}\, U \subset \{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$ と取れるならば. δ は inner.

ii) $\|\delta\| < 2\pi$ で $\mathfrak{A}$ の faithful representation π が $\pi(\mathfrak{A}) \supset \overline{\pi(\mathfrak{A})}$ の center を満足するものが存在し e^{δ} が inner automorphism ならば δ は inner

ここで $\|\delta\| = \pi$ ならば成立しない.

[例] $\mathfrak{A} = \{\lambda I + \mathcal{C}(\mathfrak{H}) : \lambda = \text{scalar}\}$ とすると. $\mathfrak{A} \cap \overline{\mathfrak{A}} = \{\lambda I\}$

E, $1-E$: infinite dimensional projection とする.

$\delta = i\, \mathrm{ad}\, \pi(1-2E)$ は outer derivation で.

$$\|\delta\| \leq \pi \|1-2E\| \leq 2\pi .$$

V: $x \longrightarrow Vx$ $Ex = x$. $(1-E)Vx = Vx$ なる one-dimensional projection とする

$$\|\pi\, \mathrm{ad}(1-2E)V\| \geq \pi \|(1-2E)Vx - V(1-2E)x\| = 2\pi .$$

$$\therefore \|\delta\| = 2\pi .$$

$$e^{\delta}(A) = e^{\pi i\, \mathrm{ad}(1-2E)}(A) = e^{\pi(1-2E)} A e^{-\pi(1-2E)} = A .$$

$\therefore e^{\delta}$ = inner automorphism.

iii) $\mathfrak{A}$ が separable で

$\{t : \alpha_t = e^{t\delta}$ が inner automorphism$\}$ が uncountable ならば

δ は inner.

ここで $\mathfrak{A}$ が non separable の場合は成立しない。又 $\mathfrak{A}$ が separable で $\{t : \alpha_t = e^{t\delta}$ が inner automorphism$\}$ が countable ならば成立しない。

例2] $\mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$ $(n=1\cdots)$, $\overset{1-E_n=1-E_1}{E_n = E_1}$: infinite dimensional proj. $(n=1\cdots)$

$\mathfrak{A} = \{\sum_{n=1}^{\infty}\oplus\{\lambda_n E_n + \lambda_{n+1}(1-E_n) + C_n\} : C_n \in C(\mathfrak{H}_n),\ \lambda_n = \text{scalar}\}$: non separable.

$\mathfrak{A}' = \{\sum\oplus \lambda_n I_n : \lambda_n : \text{scalar}\}$

$\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}' = \{\lambda \sum\oplus I_n : \lambda : \text{scalar}\}$ がわかる。

$H = \sum\oplus(1-E_n)$ とすると、$\delta = i\,\mathrm{ad}H$ は outer derivation なることは容易にわかる。

$$e^{t\delta}A = e^{it\,\mathrm{ad}H}A = e^{itH}Ae^{-itH}$$

$$e^{itH} = \sum\oplus\{\cancel{e^{it}}\, E_n + e^{it}(I_n - E_n)\}$$

$Z = \sum\oplus\{e^{int}I_n\} \in \mathfrak{A}'$. 且つ $Ze^{itH} = \sum\oplus\{e^{int}E_n + e^{i(n+1)t}(1-E_n)\}$

となるから $Ze^{itH}\in\mathfrak{A}$. よって $e^{t\delta}$ は任意の t に対して inner automorphism を定義する

以上により $\mathfrak{A}$ が non separable ならば iii) は成立しない。

例3]

$\mathfrak{A}_1 = \{\sum\oplus C_n : \|C_n\|\to 0,\ C_n\in C(\mathfrak{H}_n)\}$ と $\{\sum\oplus(E_n + e^{it}(1-E_n)) : t : \text{rational}\}$ から生成される C^*-algebra とする。$\mathfrak{A}_1$ は separable C^*-algebra.

$\delta = i\,\mathrm{ad}H = i\,\mathrm{ad}\{\sum\oplus(1-E_n)\}$ は outer となる。

なぜなら　$\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$　但し $\mathfrak{A}$ は[例2]の $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}' = \{\Sigma \oplus \lambda_n I_n\}$

もし　δ が inner ならば　$H \in \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1' \subset \mathfrak{A} + \mathfrak{A}'$ で　δ は $\mathfrak{A}$ において inner になり [例2] の結果に反する.

$\{t : e^{t\delta} : \text{inner}\}$ は仮定により countable.

以上により $\{t : e^{t\delta} : \text{inner}\}$ が countable ならば II) は成立しない.

§4.

ここでは、$I_0(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}$ の inner automorphism$\}$　$\Delta_0(\mathfrak{A}) = \{\mathfrak{A}$ の inner-derivation$\}$ が, norm に関して closed なるための条件を論じる.

$\Delta(\bar{\mathfrak{A}}) = \{\bar{\mathfrak{A}}$ の derivation$\}$ norm に関して Banach space をなすことを注意する.

定理2.　I) 次の三条件は同値.

i)　$\Delta_0(\mathfrak{A})$ は closed

ii)　$\mathfrak{Z} = \mathfrak{A}$ の center

　　$\mathfrak{Z}_1 = \bar{\mathfrak{A}}$ の center

　　$\exists k > 0$ s.t.　$d(A, \mathfrak{Z}) \leq k\, d(A, \mathfrak{Z}_1)$　for $\forall A \in \mathfrak{A}$

但し　$d(A, \mathfrak{Z})$ は A から $\mathfrak{Z}$ への distance

iii)　$\exists m > 0$ s.t. $d(U, U(\mathfrak{Z})) \leq m\, d(U, U(\mathfrak{Z}_1))$　for $\forall U \in U(\mathfrak{A})$

但し　$U(\mathfrak{A})$, $U(\mathfrak{Z})$ $U(\mathfrak{Z}_1)$ はそれぞれ, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}_1$ の unitary operator の全体.

II) i) と iii) より 次の iv) が出る. $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{A}$ が separable ならば,

　i)～iv) は同値.

iv)　$I_0(\mathfrak{A})$ は closed.

«proof» 証明は i)⇒ii) のみを示す.

[1] より $\bar{\mathfrak{A}}$ の derivation が inner になるから

$\bar{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}_1 \longrightarrow \Delta(\bar{\mathfrak{A}})$ = conti onto, 従って closed graph theorem より

$$\bar{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}_1 \cong \Delta(\bar{\mathfrak{A}})$$

$\mathfrak{A}$ の derivation は $\bar{\mathfrak{A}}$ へ unique isometry に拡張されるから

$$\begin{array}{ccc} \Delta_0(\mathfrak{A}) & \longrightarrow & \bar{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}_1 \cong \Delta(\bar{\mathfrak{A}}) \\ \uparrow & & \\ \mathfrak{A}/\mathfrak{Z} & & \end{array}$$

それぞれ conti になる

条件より $\Delta_0(\mathfrak{A})$ は closed だから. $\mathfrak{A}/\mathfrak{Z} \cong \Delta_0(\mathfrak{A})$, 上の mapping で

$\mathfrak{A}/\mathfrak{Z}$ は $\bar{\mathfrak{A}}/\mathfrak{Z}_1$ の closed set に移るから closed graph theorem より

逆も conti. よって ii) が成立する

ここで $\mathfrak{A}$ が non separable ならば iv)⇒iii) が成立しないことを

示す.

例 4] 記号は 例 2] と同じ.

例 2] において注意したように $\mathfrak{A}$ の center $= \{\lambda \sum \oplus I_n : \lambda = \text{scalar}\}$

$\bar{\mathfrak{A}}$ の center $= \{\sum \oplus \lambda_n I_n : \lambda_n = \text{scalar}\}$

$$U_k = \sum \oplus \{\exp \tfrac{i n\pi}{k} E_n + \exp \tfrac{i(n+1)\pi}{k}(1-E_n)\} \in \mathfrak{A} \quad \text{とすると}$$

$$d(U_k, \mathfrak{Z}) \geq 1 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

$$d(U_k, \mathfrak{Z}_1) \leq \left|\exp \tfrac{i\pi}{k} - 1\right| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

従って iii) を満足はしない.

今 $U = \sum \oplus \{\lambda_n E_n + \lambda_n'(1-E_n) + C_n\} = \sum \oplus U_n$, $|\lambda_n| = |\lambda_n'| = 1$, $C_n \in C(\mathfrak{H}_n)$ の

unitary operator により induce される $\mathfrak{A}$ の automorphism α を

考えると。 $C_n = \prod_{r=1}^{n} \lambda_{r-1}\lambda_r^{-1}$ $V_n = C_n U_n$ $V = \Sigma\oplus V_n \in \mathfrak{A}$

ということより α は inner になる。

$\mathfrak{A}_n = \{\lambda E_n + \lambda'(1-E_n) + C_n$, λ, λ': scalar $C_n \in C(\mathfrak{H}_n)\}$, 上に述べたことより

$\mathfrak{A}$ の automorphism α が inner $\Longleftrightarrow$ $\alpha = \Sigma\oplus\alpha_n$. α_n が $\mathfrak{A}_n$ の

inner automorphism.

$\mathfrak{A}_n$ は separable より iv) と iii) は同値。又 $\mathfrak{A}_n$ の center $= \bar{\mathfrak{A}}_n$ の center

$= \{\lambda I : \lambda$: scalar$\}$ より $\mathfrak{A}_n$ は iv) を満たす、従って 上に述べた事より

$\mathfrak{A}$ は iv) を満たす。

non separable ならば, iv) $\Rightarrow$ iii) は成立しない。 q.e.d.

Reference

[1] Kadison and Ringrose ; Derivations and automorphisms of operator algebras I Communication Math. ph. 4 (1967)

[2] Sakai. Derivations of W^*-algebras, Ann. Math 83 (1966)

[3] Dixmier : "Les C^*-algebras et leurs representation" Gauthier-Villars.

[4] Dunford and Schwarts " Linear operator I" New-York.